On a donc : $\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{2}{3}$

***Conclusion*** : $\forall x \in [1,2],\ |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \leq U_n \leq 2$.

• Pour $n=0$, $U_0 = 1 \Rightarrow 1 \leq U_0 \leq 2$

• Supposons que pour un entier donné $n$, $1 \leq U_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq U_{n+1} \leq 2$.

On a : $U_n \in [1,2]$ or pour tout $x \in [1,2]$, $1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow$ $1 \leq f(U_n) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$.

***Conclusion*** : $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \leq U_n \leq 2$.

b) on a :

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,2] \\ \forall x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ U_n \in [1,2] \end{cases}$$

donc, d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \left| f(U_n) - f(2\sqrt{\tfrac{2}{3}}) \right| \leq \frac{2}{3} \left| U_n - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} \right|$$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(2\sqrt{\tfrac{2}{3}}) = \sqrt{\tfrac{32}{3}} - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 4\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}$

***Conclusion*** : $\forall n \in \mathbf{N},\ \left| U_{n+1} - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} \right| \leq \frac{2}{3} \left| U_n - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} \right|$.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ \left| U_n - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• Pour $n=0$, $U_0 = 1 \Rightarrow \left| 1 - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} \right| \leq 1$

• Supposons que pour un entier $n$ donné, $\left| U_n - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$